

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

Αποδείξαμε πειραματικά, με τη βοήθεια του φαινομένου της περίθλασης, ότι τα ηλεκτρόνια έχουν εκτός από τη σωματιδιακή και κυματική φύση. Υπολογίσαμε τις σταθερές πλέγματος του γραφίτη της συσκευής του πειράματος και τις βρήκαμε $d_1=(1.113\pm 0.034)\text{\AA}$ και $d_2=(1.913\pm 0.059)\text{\AA}$. Υπολογίσαμε επίσης τη σταθερά Planck θεωρώντας γνωστές τις σταθερές πλέγματος του γραφίτη.

Με βάση τη μία σταθερά $d_1=1.23\text{\AA}$ τη βρήκαμε: $h_1=(4.568\pm 0.140)\cdot 10^{-21}\text{MeV}\cdot\text{sec}$ και με βάση τη δεύτερη σταθερά $d_2=2.13\text{\AA}$ τη βρήκαμε: $h_2=(4.604\pm 0.141)\cdot 10^{-21}\text{MeV}\cdot\text{sec}$.

Θεωρητική εισαγωγή

Το φως εκτός από την κυματική του φύση έχει και σωματιδιακή. Αντίστοιχα, όλα τα κινούμενα σωματίδια, εκτός από τη σωματιδιακή φύση έχουν και κυματική, σύμφωνα με την πρόταση του Louis de Broglie. Το μήκος κύματος των κινούμενων σωματιδίων δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

η οποία είναι ανάλογη της σχέσης που περιγράφει την ορμή των φωτονίων: $p=h/\lambda$ (όπου h η σταθερά Planck και p η ορμή του σωματιδίου). Η σχέση (1) ισχύει για μικρές ταχύτητες όπου δεν απαιτείται σχετικιστική διόρθωση.

Για τα ηλεκτρόνια, όταν αυτά επιταχύνονται σε τάσεις $<10\text{kV}$, η κινητική τους ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{mu^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = eV \quad (2)$$

από όπου προκύπτει για την ορμή:

$$p = \sqrt{2meV} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (1) έχουμε για το μήκος κύματος κινούμενου ηλεκτρονίου (για χαμηλές ταχύτητες $<10\text{kV}$):

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emV}} \quad (4)$$

Για να αποδείξουμε την κυματική φύση των ηλεκτρονίων πρέπει να τους αποδώσουμε κάποια ιδιότητα των κυμάτων. Ένα χαρακτηριστικό φαινόμενο που συμβαίνει στα κύματα είναι αυτό της περίθλασης. Για να συμβεί περίθλαση πρέπει το φράγμα περίθλασης να έχει σταθερά της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Για τα κινούμενα ηλεκτρόνια είναι της τάξης μεγέθους του \AA . Κατάλληλα φράγματα για αυτά τα μήκη κύματος είναι οι κρύσταλλοι. Ο κρύσταλλος είναι μια επαναλαμβανόμενη μονάδα στις τρεις διαστάσεις (κρυσταλλική κυψελίδα). Η απόσταση των ατόμων του είναι της τάξης μεγέθους του \AA . Τα άτομα του κρυστάλλου, λόγω αυτής της δομής, σχηματίζουν ένα πλέγμα παράλληλων ισαπέχοντων επιπέδων που ο αριθμός και ο προσανατολισμός τους εξαρτώνται από τη δομή του κρυστάλλου.

Η μελέτη της περίθλασης στους κρυστάλλους μπορεί να πραγματοποιηθεί και με ακτίνες X και οι νόμοι που ισχύουν για αυτές θα έχουν ισχύ και για κινούμενα σωματίδια γενικά. Στην περίπτωση των ακτίνων X, όταν αυτές πέσουν σε ένα άτομο, τότε αυτό ταλαντώνεται σε φάση με την προσπίπτουσα ακτινοβολία. Εκπέμπεται έτσι ακτινοβολία, με ίδιο μήκος κύματος και φάση με την προσπίπτουσα, η οποία συμβάλλει. Η συμβολή είναι ανοικοδομητική σε ορισμένη κατεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία ίση με τη γωνία πρόσπτωσης. Προς τις άλλες κατευθύνσεις έχουμε απόσβεση. Επειδή το φαινόμενο αυτό συμβαίνει για τις ακτίνες X σε όλα τα επίπεδα πλέγματος, για να συμβάλλουν ανοικοδομητικά οι εκπεμπόμενες ακτινοβολίες θα πρέπει να έχουν διαφορά φάσης ίση με 2π ή η διαφορά πορείας των δεσμών να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος. Αυτό αποτυπώνεται μαθηματικά με την παρακάτω σχέση:

$$2d \sin\theta = n\lambda \quad (5)$$

και αποτελεί το νόμο του Bragg, σύμφωνα με τον οποίο, αν μια ακτινοβολία X προσπέσει σε ένα κρύσταλλο, ανοικοδομητική συμβολή θα έχουμε μόνο σε καθορισμένη γωνία πρόσπτωσης για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση (όπου d είναι η σταθερά πλέγματος του κρυστάλλου και θ η γωνία που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτινοβολία με το επίπεδο

του πλέγματος του κρυστάλλου). Ανάλογα με την τιμή του n (1,2,3,...,n) έχουμε κροσσούς συμβολής πρώτης τάξης, δεύτερης κλπ.

Στην περίπτωση που η ακτινοβολία προσπίπτει σε λεπτή σκόνη κρυστάλλων (που είναι δηλαδή πολλοί μονοκρύσταλλοι τυχαία προσανατολισμένοι) τότε οι κρύσταλλοι που ικανοποιούν το νόμο του Bragg διατάσσονται γύρω – γύρω από τη δέσμη. Το αποτέλεσμα τότε της δευτερογενούς εκπομπής είναι μια κωνική επιφάνεια και όχι μια μεμονωμένη δέσμη.

Αν οδηγήσουμε μια λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων σε ένα λεπτό σώμα που αποτελείται από σκόνη κρυσταλλικού υλικού θα πρέπει, εφόσον τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, να συμπεριφερθούν με παρόμοιο τρόπο με τις ακτίνες X και να συμβεί το φαινόμενο της περίθλασης. Η κάθετη τομή της κωνικής επιφάνειας, που περιμένουμε να σχηματιστεί, με ένα επίπεδο, θα σχηματίζει ένα κύκλο και αν η επιφάνεια αυτή είναι ένα φθορίζον πέτασμα θα μπορούσαμε να τον δούμε πάνω σε αυτό.

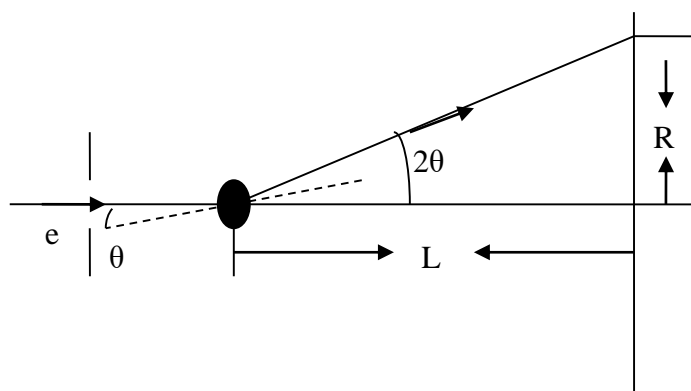
Τα ηλεκτρόνια, σε αντίθεση με τις ακτίνες X , δεν είναι πολύ διεισδυτικά. Αλληλεπιδρούν με διαφορετικό τρόπο με την ύλη προσδίδοντας μέρος της κινητικής τους ενέργειας, γεγονός που σύμφωνα με το νόμο του de Broglie αυξάνει το μήκος κύματος τους. Για να συμβάλλουν οι ακτινοβολίες όμως θα πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος κύματος και έτσι συμβολή αναμένεται να υπάρχει μόνο από τα δύο πρώτα επίπεδα. Το n για αυτό το λόγο στη σχέση (5) θα είναι μονάδα. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$2d \sin \theta = \frac{h}{\sqrt{2emV}} \quad (6)$$

Η παραπάνω έκφραση μας φανερώνει μια εξάρτηση της γωνίας για την οποία έχουμε ανοικοδομητική συμβολή από την τάση που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια. Ο συνδυασμός των δύο διαφορετικών νόμων στη σχέση (6) μας επιβεβαιώνει την κυματική φύση των ηλεκτρονίων. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πειραματικά ότι ισχύει η εξάρτηση αυτή.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από έναν αερόκενο σωλήνα, ένα τροφοδοτικό υψηλής τάσης για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων και ένα τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για τη θέρμανση των νημάτων. Ο αερόκενος σωλήνας περιέχει ένα πυροβόλο ηλεκτρονίων που από ένα κενό στην άνοδο αυτού σχηματίζεται μια λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων η οποία οδηγείται στο υλικό που θα συμβεί η περίθλαση. Το υλικό αυτό είναι γραφίτης σε σκόνη τοποθετημένος σε μια μικρή σακουλίτσα με λεπτά τοιχώματα. Απέναντι από την άνοδο υπάρχει ένα φθορίζον πέτασμα στο οποίο, αν συμβεί το φαινόμενο της περίθλασης, περιμένουμε να δούμε ένα κύκλο όπως περιγράφηκε παραπάνω. Η διάταξη αυτή παρουσιάζεται στο σχ.1.



Σχήμα 1. Σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στο σωλήνα περίθλασης.

Στο σχήμα 1 παριστάνεται με τη διακεκομμένη γραμμή το επίπεδο του κρυσταλλικού πλέγματος ενώ με L η απόσταση του γραφίτη από το φθορίζον πέτασμα, R είναι η ακτίνα του σχηματιζόμενου δακτυλίου και θ η γωνία που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτινοβολία με το επίπεδο πλέγματος. Από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\tan 2\theta = \frac{R}{L} \quad (7)$$

και αν η γωνία 2θ είναι μικρή τότε:

$$\tan 2\theta \cong \sin 2\theta \cong 2\theta(\text{rad}) \quad (8)$$

αν η γωνία 2θ είναι μικρή τότε και η γωνία θ θα είναι μικρή και έτσι:

$$\sin\theta \cong \theta(\text{rad}) \quad (9)$$

και η σχέση (6) με συνδυασμό των (7), (8) και (9) γίνεται:

$$\begin{aligned} d \frac{R}{L} &= \frac{h}{\sqrt{2emV}} \Rightarrow R = \frac{Lh}{d\sqrt{2emV}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow D = 2R = \frac{h}{d} \frac{2L}{\sqrt{2em}} \frac{1}{\sqrt{V}} \end{aligned} \quad (10)$$

καταλήγουμε λοιπόν ότι αν θα έχουμε το φαινόμενο της περίθλασης και κατ' επέκταση κυματική φύση στα ηλεκτρόνια, θα πρέπει η διάμετρος του δακτυλίου που θα σχηματιστεί να είναι ανάλογη της αντίστροφης τετραγωνικής ρίζας της εφαρμοζόμενης ανοδικής τάσης επιτάχυνσης (μεγέθη που μπορούμε και τα δύο να τα μετρήσουμε στο πείραμά μας).

Ρυθμίσαμε την τάση στα 10kV και παρατηρήσαμε στο πέτασμα να σχηματίζονται δύο δακτύλιοι. Η ύπαρξη των δύο διαφορετικών δακτυλίων εξηγείται από το γεγονός ότι η περίθλαση στον κρύσταλλο του γραφίτη συμβαίνει, λόγω της δομής του, σε δύο ομάδες επιπέδων πλέγματος με διαφορετική σταθερά η καθεμία. Μειώσαμε σταδιακά την τάση μέχρι τα 2.4kV με βήματα των 0.4kV μετρώντας κάθε φορά τη διάμετρο των δακτυλίων. Ορίσαμε σφάλμα στη μέτρηση της τάσης 0.1kV (τελευταίο σημαντικό ψηφίο του οργάνου) και στη μέτρηση της διαμέτρου 0.1cm (ελάχιστη υποδιαίρεση του μέτρου). Επίσης παρατηρούμε ότι η σχέση (10) είναι της μορφής $y=bx$. Υπολογίσαμε βάσει των μετρήσεων την ποσότητα $x = 1/\sqrt{V}$ βάζοντας την τιμή της τάσης σε Volts και υπολογίσαμε και το σφάλμα που μεταδίδεται στο x από το σφάλμα στην τιμή της τάσης:

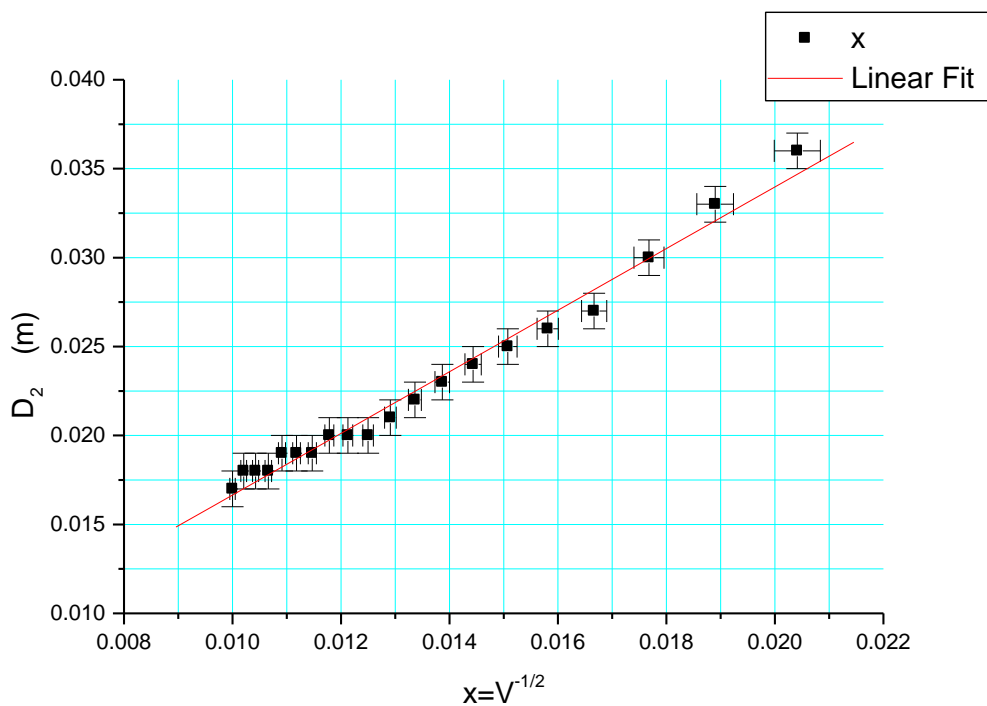
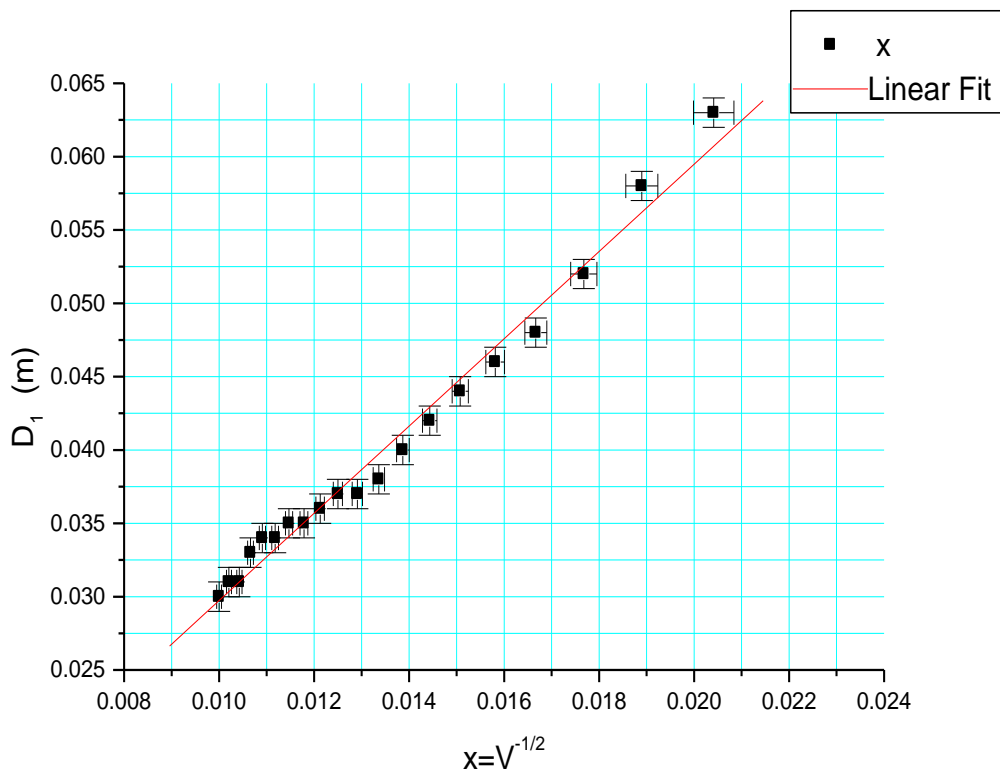
$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 \sigma_V^2 \Rightarrow \sigma_x = \frac{V^{-3/2} \sigma_V}{2} \quad (11)$$

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων και των υπολογισμών του x και σ_x παρουσιάζονται στον πίνακα I.

Πίνακας Ι. Διάμετρος των δακτυλίων ανάλογα με την εφαρμοζόμενη τάση.

α/α	V (kV)	D_1 (cm)	D_2 (cm)	$x=1/\sqrt{V}$ (V σε Volts)	σ_x
1	10.0	3.0	1.7	0.0100	$5.00 \cdot 10^{-5}$
2	9.6	3.1	1.8	0.0102	$5.32 \cdot 10^{-5}$
3	9.2	3.1	1.8	0.0104	$5.67 \cdot 10^{-5}$
4	8.8	3.3	1.8	0.0107	$6.06 \cdot 10^{-5}$
5	8.4	3.4	1.9	0.0109	$6.49 \cdot 10^{-5}$
6	8.0	3.4	1.9	0.0112	$6.99 \cdot 10^{-5}$
7	7.6	3.5	1.9	0.0115	$7.55 \cdot 10^{-5}$
8	7.2	3.5	2.0	0.0118	$8.18 \cdot 10^{-5}$
9	6.8	3.6	2.0	0.0121	$8.92 \cdot 10^{-5}$
10	6.4	3.7	2.0	0.0125	$9.77 \cdot 10^{-5}$
11	6.0	3.7	2.1	0.0129	$10.80 \cdot 10^{-5}$
12	5.6	3.8	2.2	0.0134	$11.90 \cdot 10^{-5}$
13	5.2	4.0	2.3	0.0139	$13.30 \cdot 10^{-5}$
14	4.8	4.2	2.4	0.0144	$15.00 \cdot 10^{-5}$
15	4.4	4.4	2.5	0.0151	$17.10 \cdot 10^{-5}$
16	4.0	4.6	2.6	0.0158	$19.80 \cdot 10^{-5}$
17	3.6	4.8	2.7	0.0167	$23.10 \cdot 10^{-5}$
18	3.2	5.2	3.0	0.0177	$27.60 \cdot 10^{-5}$
19	2.8	5.8	3.3	0.0189	$33.70 \cdot 10^{-5}$
20	2.4	6.3	3.6	0.0204	$42.50 \cdot 10^{-5}$

Από τις μετρήσεις μας παρατηρούμε ότι η διάμετρος των δακτυλίων είναι ανάλογη της ποσότητας $x = 1/\sqrt{V}$ όπως προβλέψαμε στη σχέση (10) αποδεικνύοντας έτσι την εξάρτηση της γωνίας θ από την τάση επιτάχυνσης της σχέσης (6) και την κυματική φύση των ηλεκτρονίων. Με βάση τις τιμές D_1 και x και D_2 και x μπορούμε να κάνουμε από ένα διάγραμμα για το κάθε ζευγάρι τιμών και να διαπιστώσουμε έτσι γραφικά την αναλογία των ποσοτήτων. Από την κλίση της ευθείας που θα προκύψει μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές πλέγματος του γραφίτη ή αν αυτές είναι γνωστές τη σταθερά Planck.



Εικόνα 1. Μεταβολή της διαμέτρου του εξωτερικού D_1 και του εσωτερικού D_2 δακτυλίου σε συνάρτηση με την ποσότητα $x = 1/\sqrt{V}$.

Από την επεξεργασία των τιμών και των σφαλμάτων αυτών βρίσκουμε ότι η κλίση της ευθείας για τον εξωτερικό δακτύλιο (με διάμετρο D_1) είναι $b_1=2.976\pm 0.091$ και για τον εσωτερικό (με διάμετρο D_2) είναι $b_2=1.732\pm 0.053$. Η επεξεργασία των τιμών για τον υπολογισμό των κλίσεων έγινε με το πρόγραμμα «Microcal Origin».

Από τις τιμές των b_1 και b_2 μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές πλέγματος του γραφίτη. Με βάση τη σχέση (10) έχουμε:

$$b_i = \frac{h}{d_i} \frac{2L}{\sqrt{2em}} \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow d_i = \frac{2hL}{b_i \sqrt{2em}}$$

και το σφάλμα που μεταδίδεται στη σταθερά πλέγματος από την κλίση είναι:

$$\sigma_{d_i}^2 = \left(\frac{\partial d_i}{\partial b_i} \right)^2 \sigma_{b_i}^2 \Rightarrow \sigma_{d_i} = \frac{2hL}{b_i^2 \sqrt{2em}} \sigma_{b_i} \quad (13)$$

με αντικατάσταση των τιμών $h=4.135 \cdot 10^{-21} \text{MeV} \cdot \text{sec}$, $L=0.135 \text{m}$, $e=1.6022 \cdot 10^{-19} \text{Cb}$, $m=0.511 \text{MeV}/c^2$, $c=3 \cdot 10^8 \text{m/sec}$ στις σχέσεις (12) και (13) βρίσκουμε ότι $d_1=(1.113 \pm 0.034) \text{Å}$ και $d_2=(1.913 \pm 0.059) \text{Å}$.

Από τις τιμές των b_1 και b_2 μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τη σταθερά Planck αν είναι γνωστές οι σταθερές πλέγματος. Από τη σχέση (12) προκύπτει:

$$b = \frac{h}{d} \frac{2L}{\sqrt{2em}} \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{bd \sqrt{2em}}{2L}$$

και το σφάλμα που μεταδίδεται στη σταθερά Planck από την κλίση είναι:

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 \Rightarrow \sigma_h = \frac{d \sqrt{2em}}{2L} \sigma_b \quad (15)$$

από όπου με αντικατάσταση των τιμών της προηγούμενης παραγράφου και για $d_1=1.23\text{\AA}$ και $d_2=2.13\text{\AA}$ βρίσκουμε δύο διαφορετικές τιμές για τη σταθερά του Planck:

$h_1=(4.568\pm 0.140)\cdot 10^{-21}\text{MeV}\cdot\text{sec}$ και $h_2=(4.604\pm 0.141)\cdot 10^{-21}\text{MeV}\cdot\text{sec}$ αντίστοιχα.

Συμπεράσματα

Αποδείξαμε την κυματική φύση των ηλεκτρονίων. Ξεκινώντας από δύο διαφορετικούς νόμους, του de Broglie και του Bragg, καταλήξαμε σε ένα κοινό σημείο και το αποδείξαμε πειραματικά με απλές μετρήσεις τάσης και μήκους. Μέσα από τις σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε και τις μετρήσεις που κάναμε υπολογίσαμε με σχετική ακρίβεια, περίπου 10% απόκλιση από τις πραγματικές τιμές, τις σταθερές πλέγματος του γραφίτη και τη σταθερά Planck (πραγματικές τιμές για τις σταθερές πλέγματος : $d_1=(1.2281\pm 0.0001)\text{\AA}$ και $d_2=(2.1271\pm 0.0001)\text{\AA}$ και για τη σταθερά Planck: $h=4.135\cdot 10^{-21}\text{MeV}\cdot\text{sec}$). Η απόκλιση αυτή οφείλεται σε συστηματικό σφάλμα εξ αιτίας της μέτρησης της διαμέτρου που κάναμε. Το φθορίζον πέτασμα ήταν σφαιρικό και οι μετρήσεις μας γινόταν στο αντίστοιχο τόξο ενώ η διάμετρος του κύκλου στην πραγματικότητα ήταν η χορδή του. Για αποφύγουμε αυτό το σφάλμα θα έπρεπε να κάναμε σε κάθε μέτρηση και η ανάλογη διόρθωση.